7.2 正交对角线化 2020年9月30日10点19分

在本节中,我们将关注对称矩阵对角化的问题.正如我们将看到的那样,该问题与找到由的特征向量组成的的正交基础密切相关.此类问题很重要,因为应用程序中出现的许多矩阵都是对称的.

**定义1** 如果和是方阵,那么我们说如果存在正交矩阵使得,则称B**正交相似**于A.

注意,如果与正交相似,那么和也同样正交相似,因为我们可以通过取(验证)将A表示为.在这种情况下,我们可以说,如果和中的任何一个正交于另一个,则它们就是正交相似的矩阵.

如果与某个对角矩阵正交相似,比如

那么我们说是**正交对角线化**的,而是**正交对角线**A.并且D是**对角线矩阵**.

**定理7.2.1** 如果A是具有实数项的矩阵,则下列条件是等价的:

1. A是可正交对角线化的.
2. A具有包含n个特征向量的正交[orthonormal]基.
3. A是对称的.

**定理7.2.2** 如果是具有实数项的对称矩阵,则:

1. A的特征值都是实数.
2. 来自不同特征空间的特征向量是正交的.

**正交对角化一个对称矩阵**

1. 找到A的每个特征空间的基向量.
2. 将Gram–Schmidt过程应用于每一个基向量,以获得每个特征空间的正交基.
3. 形成矩阵P,该矩阵的列是在步骤2中构造的向量.此矩阵将正交对角化,并且对角线上的特征值将与它们在中对应的特征向量的顺序相同.

**光谱分解**

如果A是一个对称矩阵,并且被

正交对角化并且如果是对应于的单位特征向量的特征值,则我们知道是以特征值位于对角线上的对角矩阵.则矩阵A可以表达为

乘以得到公式

这称为的光谱分解.

**定理7.2.3 Schur定理** 如果A是具有实数项和实特征值的矩阵,则存在一个正交矩阵,使得是以下形式的上三角矩阵

其中是根据多重性重复的A的特征值.

**定理7.2.4 Hessenberg定理** 如果A是具有实数项的矩阵,则存在一个正交矩阵,使得是以下形式的矩阵

**7.3 二次形式** 2020年9月30日11点50分

形式为

的表达式经常出现在线性方程和线性系统的研究中.如果被当作常量,则该表达式是一个具有n元变量的实值函数并且被称为的线性形式.线性形式的所有变量都具有一次幂,并且没有变量之间的乘积.在这里,我们将关注上的二次形式,它们的形式函数为

形式为的项称为**叉积[cross product]**项.通常将涉及的叉积项与涉及的叉积项组合在一起以避免重复.因此,上的一般二次形式通常表示为

且上的一般二次形式为

如果像往常一样不区分数字和矩阵,并且如果让为变量的列向量,则(1)和(2)可以表示为矩阵形式

请注意,这些公式中的矩阵A是对称的,其对角线项是平方项的系数,非对角线项是叉积项的系数的一半.通常,如果是一个对称矩阵,而是一个列变量向量,则我们称该函数为

**与A相关的二次形式**. 为了方便,可以将（3）用点积符号表示为

在A是对角矩阵且二次形式没有叉积项的情况下;例如.如果具有对角线项则

如果我们在二次形式改变变量,则我们得到

由于矩阵是对称的(需检验),因此变量变化的影响是产关于变量的新的二次形式.特别是,如果选择将正交对角化,则新的二次形式为,其中D是对角矩阵,其特征值在主对角线上;即

**定理7.3.1 主轴定理** 如果是对称的矩阵,则存在变量的正交变化,该变化将二次形式转换为二次形式,而没有叉积项.具体而言,如果正交对角线化，则以二次形式改变变量会产生二次形式

其中是与形成连续列的特征向量相对应的A的特征值.

**几何中的二次项**

**鉴别圆锥曲线**

这里一段内容讨论主轴定理在在圆锥曲线上的应用.

**定义1** 二次形式被称为

1. 正定的如果;
2. 负定的如果;
3. 不定的[indefinite]如果.

**定理7.3.2** 如果A是一个对称矩阵,则

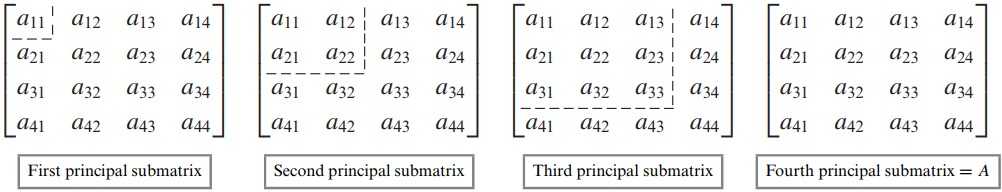
1. 是正定的当且仅当A的所有特征值是正数.
2. 是负定的当且仅当A的所有特征值是负数.
3. 是不定的当且仅当A的特征值至少有一个是正的以及至少有一个是负的.

**使用特征值鉴别圆锥截面**

本小节内容也比较重要,是关于怎样从矩阵中得出椭圆轴长的算法.

**定理7.3.3** 如果A是一个对称的矩阵,则

1. 表示一个椭圆仅当A是正定的.
2. 没有图像仅当A是负定的.
3. 表示一个双曲线仅当A是不定的.



正定矩阵是应用程序中最重要的对称矩阵,因此,有必要进一步了解它们.我们已经知道对称矩阵是正定的当且仅当它的特征值都为正.现在,我们将提供一个可用于确定对称矩阵是否为正定而不需要求解特征值的准则.为此,我们将矩阵的第个**主子矩阵[principal submatrix]**定义为由的前行和列组成的子矩阵.例如.上图是一般4×4矩阵的主子矩阵.

**定理7.3.4** 如果A是一个对称矩阵,则:

1. A是正定的当且仅当每一个子主矩阵的行列式为正.
2. A是负定的当且仅当以第一个子主矩阵的负行列式开始,其余行列式的值按顺序出现正负值交替.
3. A是不定的当且仅当它既不是正定的也不是负定的并且至少有一个主子矩阵的行列式为正以及至少有一个主子矩阵的行列式为负.

7.4 二次形式的优化应用 2020年9月30日15点27分

定理7.4.1 约束极值定理 设为对称矩阵,其特征值按大小递减顺序为.则:

二次形式在向量集上获得最大值和最小值.

在1)部分中获得的最大值出现在对应于特征值的向量.

在1)部分中获得的最小值出现在对应于特征值的向量.